MONOTON KETMA-KETLIKLAR VA ULARNING LIMITI

Muhammadieva Maftuna Akbar qizi
O'zbekiston-Finlandiya pedagogika insituti Matematika kafedrasi assistenti
Ahmadullayeva Sabina Radiqovna
O'zbekiston-Finlandiya pedagogika insituti 4-bosqich talabasi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada* ***monoton ketma-ketliklar va ularning limiti*** *haqida qisqacha mulohaza yuritilgan.* ***Monoton*** *ketma –ketliklarning limiti haqidagi teoremalarni keltirilgan.* ***Monoton*** *ketma –ketliklarga doir misolarni tadbiqi ko`rsatilgan.*

Kalit so'zlar: *Monoton ketma-ketlik, tengsizlik, ketma-ketlik o'suvchi, ketma-ketlik kamayuvchi, to`plam, limit.*

Kirish

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning 2020 yil 7 maydagi № PQ-4708 qarori asosida «Matematika sohasida ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarorida o'quv jarayoni va uni takomillashtirishda axborot texnologiyalari va kompyuterlarni jamiyat hayotiga, kishilarning turmush tarziga, umumiy o'rta ta'lim maktablari, o'rta maxsus, kasb-xunar ta'limi va oliy ta'lim muassasalari o'quv jarayoniga jadallik bilan olib kirish g'oyasi ilgari surilgan.

Mamlakatimizda joriy qilingan qaysi sohada bo'lmasin, yangi innovatsion texnalogiyalar, yangi metodika, yangi usullar, tajribalar, yangi o'quv, uslubiy qo'llanmalar ishlab chiqilmoqda. Ixtisoslashtirilgan bog"cha, maktab, ta'lim muassasa faoliyatlari yanada takomillashtirilib, yosh avlod vakillariga ko'plab, keng yangi imkoniyatlarni yaratmoqda. Yoshlarning bilim darajasini yanada oshirish, ularning chet elbilan hamkorlikda malaka va ko"nikmalarini almashinish maqsadida dunyoning nufuzli universitetlari bilan hamkorlikda yoshlarni o'qishga jo'natilmoqda.

Tahlil va natijallar

Monoton ketma-ketlik tushunchasi.

Aytaylik, $\{x_n\}$ $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ (1)

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1-ta'rif**.** Agar (1) ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n \leq x_n+1$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ o'suvchi ketma-ketlik deyiladi. Agar (1) ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n < x_n+1$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ qat'iy o'suvchi ketma-ketlik deyiladi.

2-ta'rif. Agar (1) ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n \geq x_n+1$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi. Agar (1) ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n > x_n+1$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ qat'iy kamayuvchi ketma ketlik deyiladi.

1-misol. Ushbu $x_n = \frac{n+1}{n}$: $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, … ketma-ketlik qat’iy kamayuvchi ketma-ketlik bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, berilgan ketma-ketlik uchun

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \qquad x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

bo‘lib, $\forall n \in N$ uchun

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

bo‘ladi. Unda $x_n < x_n + 1$ bo‘lishi kelib chiqadi. Yuqoridagi ta’riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:
1) agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘lsa, u quyidan chegaralangan bo‘ladi:
2) agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo‘lsa, u yuqoridan chegaralangan bo‘ladi.
O‘suvchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.
2-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

ketma-ketlikning qat’iy o‘suvchi ekanligi isbotlansin.
Bu ketma-ketlikning n –hamda $(n+1)$ –hadlari uchun

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 - \frac{1}{n^2+1},$$

$$x_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} = 1 - \frac{1}{(n^2+1)+1}$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\frac{1}{(n^2+1)^2} < \frac{1}{n^2}$$

Shu tengsizlikni e’tiborga olib, topamiz:

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n^2+1)^2+1} > 1 - \frac{1}{n^2+1} = x_n$$

Demak, $\forall n \in N$ uchun $x_n < x_n+1$. Bu esa qaralayotgan ketma-ketlikning qat’iy o‘suvchi bo‘lishini bildiradi.

Monoton ketma-ketlikning limiti.

Quyida monoton ketma –ketliklarning limiti haqidagi teoremalarni keltiramiz.

1-teorema.]Agar { x_n } ketma-ketlik
1) o‘suvchi,
2) yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u chekli limitga ega bo‘ladi. Aytaylik, { x_n } ketma-ketlik teoremaning ikkala shartlarini bajarsin.Bu ketma-ketlikning barcha hadlari-dan iborat to‘plamni E bilan belgilaymiz:E ={ $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ }. Ravshanki, E yuqoridan chegaralangan to‘plam bo‘lib, $E \neq \varnothing$. Unda

to‘plamning aniq chegarasining mavjudligi haqidagi teoremaga muvofiq, sup E mavjud bo‘ladi. Uni a bilan belgilaylik:

$$\sup E = a.$$

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonini olaylik. To‘plamning aniq yuqori chegarasi ta’rifiga binoan:

1) $\forall n \in N$ uchun $x_n \le a$

2) $\exists\, x_{n0} \in E$, $x_{n0} > a - \varepsilon$

bo‘ladi. Ayni paytda $\forall n > n_0$ uchun $x_n \ge x_{n0}$ tengsizlik bajari-lib, $x_n > a - \varepsilon$ bo‘ladi.

Natijada $\forall n > n_0$ uchun $a - \varepsilon < a + \varepsilon$ ya’ni $|a - x_n| < \varepsilon$ bo‘li-shini topamiz. Demak $\{x_n\}$ ketma –ketlik chekli limitga ega va

$$\lim_{n\to\infty} = a = supE$$

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik

1) kamayuvchi,

2) quyidan chegaralangan bo‘lsa, u chekli limitga ega bo‘ladi.

Bu teorema yuqorida keltirilgan teoremaning isboti kabi isbotlanadi.

3-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n!}{n^2}$$

ketma-ketlikning limiti topilsin.

Ravshanki, $\forall n \ge 1$ uchun $x_n > 0$ bo‘ladi. Bu ketma-ketlikning x_n+1 va x_n hadlarining nisbatini qaraymiz.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{(n+1)}\right) < 1$$

Demak, $x_{n+1} < x_n$ Bundan esa berilgan ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Ayni paytda $\forall n \ge 1$ da $0 < x_n \le x_1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Demak berilgan ketma-ketlik chegaralangan. 1-teoremaga ko`ra $\{ x_n \}$ ketma-ketlik chekli limitga ega. Uni a bilan belgilaymiz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2} = a \qquad (a \ge 0)$$

Endi ushbu $x_n - x_{n+1}$ ayirmani qaraymiz. Bu ayirma uchun

$$x_n - x_{n+1} = x_n - x_{n+1} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^n} = x_n \frac{(n+1)^n - n^2}{(n+1)^n} \ge x_n \cdot \frac{2n^n - n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1}$$

bo`lib undan $x_n \ge 2x_{n+1}$ bo`lishi kelib chiqadi. Keyingi munosabatlardan topamiz: $\lim\limits_{n\to\infty} \ge 2 \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$, $a \ge 2a$ Ravshanki, bu holda a=0 bo`ladi.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2} = 0$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. O’zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning 2020 yil 7 maydagi № PQ-4708 qarori asosida «Matematika sohasida ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to’g’risida”gi qarori. Uzbekistan.
2. Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A. Matematik analizdan ma’rizalar, I q. T. “Voris-nashriyot”, 2010.
3. Canuto C., Tabacco A. Mathematical analysis I, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
4. Fixtengols G. M. Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t. M. «FIZMATLIT», 2001.
5. Tao T. Analysis 1. Hindustan Book Agency, India, 2014