Topical Issues of Science

LIMIT NIMA? LIMIT HAQIDA NIMANI BILASZ?LIMIT TUSHUNCHASINING PAYDO BO‘LISHI, LIMIT HAQIDA TUSHUNCHA. AJOYIB LIMITLAR VA ULARNING QO‘LLANISHI

Toxirov Abror Axrorovich
Ilmiy rahbar: Andijon davlat pedagokika insituti Aniq fanlar fakulteti Matematika va Informatika kafedrasi o‘qituvchisi
Abdusattorov Abdulaziz Akmaljon o‘g‘li
Talaba:Andijon davlat pedagokika insituti Aniq fanlar fakulteti Matematika va Informatika yo‘nalishi talabasi
Valiyev Muhammad Qobiljon o‘g‘li
Talaba:Andijon davlat pedagokika insituti Aniq fanlar fakulteti Matematika va Informatika yo‘nalishi talabasi
Obidjonov Muhammadqobul Rohiddin o‘g‘li
Talaba:Andijon davlat pedagokika insituti Aniq fanlar fakulteti Matematika va Informatika yo‘nalishi talabasi

Annotatsiya: *Limit (lotincha:Limes- chek, chegara) tushunchasi matematika fanining muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Agar bir o‘zgaruvchiga bog‘liq ikkinchi o‘zgaruvchi, birinchi o‘zgaruvchining o‘zgarishi jarayonida a songa cheksiz yaqinlashsa, a soni ikkinchi o‘zgaruvchi miqdorning limiti deyiladi.Hamma limitlar ham oson va qulay hisoblanmasligi mumkin, lekin ba’zi limitlarni hisoblaganimizda qulay bo‘lishi uchun ajoyib limitlar yordamga keladi.Bu maqola asosan* $\frac{0}{0}$ *va* $\frac{\infty}{\infty}$ *ko‘rinishida bo‘lgan limitlarni hisoblashga asoslangan.*

Kalit so‘zlar: *Limit, ajoyib limitlar,1-ajoyib limit, 2-ajoyib limit,funksiya uzluksizligi,nuqtada uzluksizlik, argument,o‘zgaruvchi. Ko‘shi ta’rifi. Funksiya uzluksizligi, nuqtada uzluksiz.*

Limit (lotincha:Limes- chek, chegara) tushunchasi matematika fanining muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi.Bunda limit tushunchasi o‘zgarish va cheksiz yaqinlashish jarayoniga bog‘liq. Natijada matematikada yangi tushuncha –limitlar tushunchasi paydo boldi. Limitlarning tatbiqi va rivoji differensial hisob va integral hisobning yaratilishiga,matematik analizning vujudga kelishiga olib keldi.

Limitlar nazariyasida limitlarning xossalari tekshiriladi,o‘zgaruvchi miqdor limitlarning mavjud bo‘lishi shartlari o‘rganiladi,bir necha sodda o‘zgaruvchi miqdorlarning limitlarini bilgan holda murakkab funksiyalarlimitlarini hisoblashga imkon beradigan qoidalar topildi. Limitlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri cheksiz kichik-limiti nolga teng bolgan o‘zgaruvchi miqdor tushunchasi hisoblanadi. Limitlar nazariyasing yaratilishiga I.Nyuton,

TOPICAL ISSUES OF SCIENCE

J.Dalamber, L.Eyler, O.Koshi, K.Vayershtrass, Bolsanolar katta hissa qo‘shganlar.

Limitni hisoblashda ma’lum bir qancha aniqmasliklar mavjud, $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ shunga o‘xshash aniqmasliklar uchun ajoyib limitlardan yoki Lopital qoidasini qo‘llash bilan limitini topish mumkin. Lopital qoidasiga ko‘ra hisoblashda ushbu aniqmaslikka duch kelinsa toki aniqmaslik yo‘qolmaguncha ketma ket hosila olish mumkin.

X ning qiymatlari 2 dan kichik bo‘lib,2 ga yaqinlasha borganda f(x)=x^2 funksiyaning qiymatlari jadvalini qaraylik:

x	**1**	**1.9**	**1.99**	**1.999**	**1.9999**
f(x)	1	3.61	3.9601	≈ 3.99600	≈ 3.99960

Yoki

X	3	2.1	2.01	2.001	2.0001
f(x)	9	4.41	4.0401	≈ 4.00400	≈ 4.00040

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, x ning qiymatlari 2 ga qancha yaqinlashsa, f(x) funksiyaning mos qiymatlari ham 4 soniga yaqinlashadi. Bunda x argument (o‘zgaruvchi) 2 ga chapdan yaqinlashganda f(x) ning qiymatlari 4 soniga yaqinlashadi deymiz. Endi x ning qiymatlari 2 dan katta bo‘lib, 2 ga yaqinlasha borganida f(x)=X^2 funksiyaning qiymatlari jadvalini qaraylik:

2 ga chapdan yaqinlashganda f(x) ning qiymatlari 4 soniga yaqinlashadi deymiz. Endi x ning qiymatlari 2 dan katta bo‘lib, 2 ga yaqinlasha borganida f(x)=x 2 funksiyaning qiymatlari jadvalini qaraylik:

Bunday holatda x argument 2 ga o‘ngdan yaqinlashganda, f(x) funksiya qiymatlari 4 soniga yaqinlashadi deymiz. Yuqoridagi ikki holatni umumlashtirib, x argument 2 ga yaqinlashganda, f(x) ning qiymatlari 4 soniga yaqinlashadi deymiz va buni quyidagicha yozamiz:

$$\boxed{\lim_{x\to 2} x^2=4}$$

va u quyidagicha o‘qiladi: x argument 2 ga yaqinlashganda, f(x) = x 2 funksiyaning limiti 4 ga teng. Umumiy holda funksiya limiti tushunchasiga quyidagicha yondashiladi: x≠a bo‘lib, uning qiymatlari a soniga yaqinlashsa, f(x) ning mos qiymatlari A soniga yaqinlashsin. Bu holda A sonni x a ga yaqinlashganda f(x) funksiyaning limiti deyiladi va bunday belgilanadi: limx→a f(x) = A Ayrim hollarda mazkur holatni x ning qiymatlari a ga intilganda f(x) funksiya A ga intiladi, deymiz.

Endi limitga doir misollarni ko‘rsak:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2}{6}=\frac{3^2}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ → bu misolda x nechaga intilayotgan bo‘lsa shartda berilgan misolga ham x ni olib borib qo‘yiladi.

2) $\lim\limits_{x\to 0}27x^3$=$27(0)^3$=0. → bu misolda ham o‘rniga qoyish bilan ish bitadi, o‘rniga qo‘yganimizda 0 ning kubi 0 bo‘lganligi sababli natija ham 0 bo‘ladi.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-x+x^3}{x+2}=\frac{1-2+8}{2}=\frac{9}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}3x-4$=3×3-4=9-4=5 bu misollarda ham x ni intilgan qiymatini o‘rniga qo‘yish bilan misol ishlanadi.

Endi Lopital qoidasiga ko‘ra misollar ko‘ramiz;

1)$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-5x+7}{x-4}$ bu holatda x intilgan sonni qo‘ysak kasrning maxraji 0 ga aylanib qoladi va aniqmaslikka keladi,shuning uchun bu paytda bizga Lopital qoidasi yordamga keladi.Ya’ni

Tarif:

LOPITAL qoidasi → bu $^0/_0$va $^\infty/_\infty$ shaklining noaniqliklarini

ochib beradigan funksiyalar chegaralarini topish usuli. Usulni asoslovchi teorema ma’lum sharoitlarda funksiyalar nisbati chegarasi ularning xosilalari nisbati chegarasiga teng ekanligini tasdiqlaydi.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}}$$

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-5x+8}{x-1}=\frac{(x^4-5x+8)\prime}{(x-1)\prime}=\frac{4x^3-5}{1}=\frac{4\times 1-5}{1}$=-1 bu misolda surat va maxrajdan ham Lopital qoidasiga tayanib hosila olindi.

2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{3x^3+5x^2-6x+9}{x+3}=\frac{(3x^3+5x^2-6x+9)\prime}{(x+3)\prime}=$
$\frac{9x^2+10x-6}{1}=\frac{9(-3)^2}{1}=\frac{81}{1}$=81

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin x-ctgx}{cosx}=\frac{(\sin x-ctgx)\prime}{(cosx)\prime}=\frac{\cos x+\frac{1}{sin^2x}}{sinx}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{sin^2\frac{\pi}{2}}}{sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0+\frac{1}{1}}{1}$=1→bu misolda trigonametrik parametrlar qatnashgan va tasvirlangan bu misol ham *Lopital* qoidasiga asosan ishlanadi surat va maxrajidan hosila qoidasiga asoson hosila olinadi, keyin x nechaga intilayotgan bo‘lsa o‘rniga qo‘yiladi.

Ajoyib limitlar

1-ajoyib limit

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$=1

Isbot: 0< $x<\frac{\pi}{2}$ shu intervaldan olingan barcha x lar uchun

sinx< $x<tanx$

tengsizliklar o‘rinlidir, sinx >0 bo‘lganligi uchun ushbu tengsizlikni

1< $\frac{x}{sinx}<\frac{1}{cosx}$ ni

cosx< $\frac{sinx}{x}<1$ ko‘rinishda yozishimiz mumkin. Undan

0< $1-\frac{sinx}{x}<1-cosx$

tengsizliklar kelib chiqadi.Bu tengsizliklarni ∀ $x\in(0;\frac{\pi}{2})$ uchun isbot qildik.

$\frac{sinx}{x}$ (x≠ $0)$ va cosx funksiyalarning juftligidan $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})/(0)$o′rinli ekanligini bilamiz. Shu bilan birga

0< $|x|<\frac{\pi}{2}$ da

1-cosx=2sin$x^2\frac{x}{2}$≤2$\frac{|x|}{2}$=|x|

tengsizlik o‘rinliligidan, yuqoridagi tengsizliklarni quyidagicha;

0< $1-\frac{sinx}{x}$≤x ko‘rinishga keltiramiz.

Agar $\forall\varepsilon>0$ *berilganda ham* ε *va* $\frac{\pi}{2}$ dan kichik sonlarni olib x ning 0< $x<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday qiymatida

$$\left|1-\frac{sinx}{x}\right|=\left|\frac{sinx}{x}-1\right|<\varepsilon$$

Tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.Bu esa funksiya limitining Koshi ta'rifiga birinchi ajoyib limitning to‘g‘irligini ko‘rsatadi.

1. Quyidagi limitni hisoblang; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{5}$

1-usul

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{5}$=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5sin5x}{5x}$=5$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x}$=5

2-usul

Bu limitimiz $\frac{0}{0}$ ko‘rinishadigi aniqmaslik turi bo‘lganligi sababli Lopital qoidasini qo‘llaymiz, ya'ni suratdan alohida mahrajdan alohida hosila olamiz;

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(sin5x)\prime}{(x)\prime}=\lim_{x\to 0}\frac{5cosx}{1}=5$$

2-ajoyib limit;

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Quyidagi limitni hisoblab ko‘ramiz ;

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{2}})^{\frac{n2}{2}}=e^{2}$$

Endi ajoyib limitlar jadvali bilan tanishamiz;

Quyidagi jadval ajoyib limitlar:

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$	$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$=0 {a>1}	$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}$=0 a> 1
$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$=0	$\lim_{n\to\infty} n\cdot q^n$=0 |q|< 1	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$=0
$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$=1	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$=1 {a> 0}	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$=e
$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$=1	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$=1	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$=1
$\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}$=1	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$=lna. a> 0	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$=1

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Oliy matematika asoslari: T. Jo‘rayev; A. Sadullayev; E. Xudoyberganov va boshqalar.
2. Matematik analiz. Universitet va pedagogika insitutlari talabalari uchun darslik.
3. https://t.me/universal library
4. https://www.coursehero.com
5. Matematik analiz Sh.Xurramov, X. Mansurov.