# ARGUMENT VA FUNKSIYA ORTTIRMASI. HOSILA TUSHUNCHASI, UNING GEOMETRIK VA FIZIK MA’NOLARI. FUNKSIYA DIFFERENSIALI

**Raxmonov Asqar Ne'matovich**
**Umarov Shokirjon Sheraliyevich**
**Ne'matov Shuhrat Õktamovich**
*SamDU akademik litseyi Matematika fani õqituvchilari*

Biz funksiyalar qiymatlari jadvallarini tuzish jarayonida funksiyaning $\Delta f(x) = f(x_{i+1}) - f(x_1)$ chekli ayirmasi bilan tanishganmiz. Unda funksiyani funksiya argumentning diskret qiymatlarida qaraldi, o’zining bir $f(x_0)$ qiymatida ikkinchi $f(x_0 + \Delta x)$ qiymatiga sakrab o’tgandek bo’ladi, bunda $\Delta x = h$ jadval qadami. Endi biz argumentning uzluksiz o’zgarishiga bog’liq masalalarga o’tamiz.

To’g’ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning *x* vaqt momentligi koordinatasi (o’tilgan masofa) *f* (*x*) bo’lsin. Nuqta $\Delta z = b - a$ vaqt oralig’ida $|\Delta f(a)| = |f(b) - f(a)|$ qadar ko’chadi. Agar bunda $\Delta f > 0$ bo’lsa, kochish musbat yo’nalishida bajarilgan bo’ladi. $x_0 = a$ dan *x* ga ko’chishdagi $\Delta x = h = x - a$ ayirma *agumentning a* nuqtadagi *orttirmasi*, $\Delta f(a) = f(x) - f(a)$ ayirma *funksiyaning* shu nuqtadagi *orttirmasi* deyiladi.

1 – m i s o l . Argumentning boshlang’ich qiymati *a* = 5,orttirmasi h=0,1. $f(x) = x^2$ funksiya orttirmasini topamiz.

Y e ch i sh . Argumentning *a* = 5 dan *h* = 0,1 ga ortgan: *a* + *h* = 5,1 U holda $\Delta f(5) = f(5{,}1) - f(5) = 5{,}1^2 - 5^2 = 1.01$.

2 – m i s o l Argument orttirmasi *h* ga teng. *f(x)=kx* + *l* chiziqli funksiya orttirmasini topamiz.

Y e ch i sh . *f*(*a*+*h*) = *k*(*a*+*h*)+*l*; $\Delta f()a = f(a+h) - f(a) = k(a+h) + l - ka - l = kh$

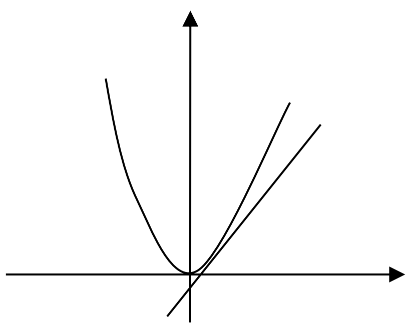
3 – m i s o l . Kubning tomoni *a* ga teng. Agar tomonlar *h* qadar orttirilsa, uning hajmi qanday o’zgaradi?

Y e ch i sh . Tomonlar *h* ga orttirilgandan so’ng uning hajmi $(a+h)^3$ ga teng bo’ladi. Natijada kubning hajmi

$$\Delta V = (a+h)^3 - a^3 = 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

ga ortadi.

$y = x^2$ funksiya grafigini (1; 1)nuqta yaqinidagi holatni kuzataylik.



V.1-rasmda parbolaning *h*=2 ozunlikdagi [0; 2] kesma ustidagi qismi tasvirlangan . Chiziq o'z egriligi bilan shu nuqtada o'tuvchi *y* = *kx*+*l* urinuvchi to'g'ri chiziqdan keskin farq qiladi. Shu nuqtada atrofini kattaroq tasvirlaylik (v.1-*b* rasm). Parabolaning nisbatan kichik *h* = 0,2 uznlikka ega bo'lgan

[0,9; 1,1] kesmadagi qismi unch egri emas. $\Delta x = h$ ning yanada kichik qiymatlarida parabola va to'g'ri chiziq kesmalari deyarli ustma – ust tushadi, ya'ni parabola (1; 1) nuqta yaqinda <<*chiziqli kichik*>>holatida bo'ladi. U boshqa nuqtalar yaqinida ham shunday <<chiziqli kichiklik>> xossasi ega bo'ladi. *Fizika nuqtayi nazarida* <<chiziqli kichiklik>> xossasimos fizik jarayon deyarli tekis, deyarli doimiy tezlik bilan ro'y berayotganini aglatadi. Matematikada <<chizqli kichik holatdagi funksiya>> tushunchasi *differensiallanuvchi* nomi bilan ataladi (lot.:differentia-ayirma). Holatni matematik jihatdan tushintiramiz. Agar *x* = *a* dan *x*=*a*+*h* ga o'tishda *f* funksiya orttirmasini

$\Delta f = f(a+h) - f(a) = (k+a)h$ (1)

Ko'rinishda berish mumkin bo'lsa, *f* funksiya *x* = *a* da *differensiallonuvchi funksiya* deyiladi, bunda

*k* – son, $\alpha(x)$ funksiya $\Delta x = h \to 0$ da cheksiz kichik $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(x) = 0$

Masalan, *f*(*x*) = *kx*+*l* chiziqli funksiya orttirmasi

$\Delta f$ =*f* (*a*+*h* ) – *f* (*a*) = *k*(a+h)+*l*-*ka*-*l*=*kh*

ya'ni $\alpha(x) = 0$ bo'lishini ko'ramiz. Demak chiziqli funksiya *x* ning barch qiymatlarida differensiallanivchi funksiyalar uchun $\Delta x$ va $\Delta f$ ortirmalarning faqat taqribiy proporsionalligio'rinli bo'ladi:

$f(a+h) - f(a) \approx kh,$ bundagi chetlanish $\alpha(x)$ ga teng.

1 – m i s o l . $x^2$ funksiya *x* ning istalgan qiymatida differensialanadi. Haqiqattan, funksiya *x* dan *x*+*h* ga o'tishda

$\Delta f = (x+h)^2 - x^2 = (2x+h)h$

orttirmaga ega, undagi 2*x* ta'rif bo'yicha *k* ni, *h* esa $\alpha$ funksiyani ifodalaydi, $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$. (1) teglikdan $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = k + \alpha,$ bunda $h = (x+h) - x = \Delta x,\ \lim\limits_{h\to 0} \alpha(x) = 0.$

Bularga ko'ra:

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = k$ (2) va $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\right) = 0.$

Aksincha, bu limitli ifodadan (1) tenglikni hosil qilish mumkin. Shu tariqa ushbu teorema isbot qilinadi.

T e o r e m a. $k = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}$ *limit mavjud bo'lgandagina f* (*x*)*funksiya differensiallanadi va uning orttirmasi* $\Delta f = f(x+h) - f(x) = = (k+a)h$ b*o'ladi bunda* $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(x) = 0.$

$\Delta f = (k+a)h$ tenglik funksiyaning differensiallanishini xarakterlaydi. Masalan *v* doimiy tezlik bilan to'gri chiziqli tekis harakat qilayotgan jism *t* vaqtda $s = vt + s_0$ masofani bosib o'tsin bunda $s_0$ - harakat boshlanguncha o'tilgan masofa, *s* bog'lanish *y* = *kx* + *l* funksiyaning o'zi $k = v,\quad x = t\quad l = s_0\quad y = s.$ Mexanika nuqtayi nazarida *k* son *harakat tezligi* geometrik jihatdan to'g'ri chiziqning *burchak koeffitsiyenti* miqdorini ifodalaydi. *K* ning qiymati *x*ga bog'liq. Demak, *k* son biror funksiyaning xususiy qiymatida iborat Bu funksiya *f*(*x*) *funksiyaning hosilasi* deb ataladi va *f '* (*x*) orqali belgilanadi. *f '* (*x*) ning *x* nuqtadagi qiymati ushbu formula bo'yich topiladi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}$$ bunda $\Delta x = h$ - argument orttirmasi.

Shunday qilib, funksiya orttirmasi *f*(*x*+*h*) – *f*(*x*) = (*k*+*a*)*h* ko'rinishida berilgan bo'lsa, *k* son hosilaning qiymatini beradi. Jism $t = t_0$ boshlang'ich vaqt momentida $f(t_0)$ koordinatali nuqtada, $t = t_0 + \Delta t$ momentda $f(t_0 + \Delta t)$ koordinatali nuqtada bo'sin. $[t_0;\, t_0 + \Delta t\ ]$ vaqt oralig'ida $\Delta f = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ masofani o'rtacha $v_{o'rt}(t) = \dfrac{\Delta f}{\Delta t}$ tezlik bilan o'tadi, bunda $\Delta t = (t_0 + \Delta t) - t_0$ otgan vaqt. O'rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limitni, ya'ni $f'(t_0)$ hosila to'g'ri chiziqli harakatning $t_0$ momentdagi *oniy(bir lahzadagi) tezligi*ni ifodalaydi:

$$v_{oniy}(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Bir jinsli sterjenning *x* uzunlikdagi qismining *f*(*x*) = *kx*, bunda *k* son – sterjenning *chiziqli zichligi*. Agar sterjen bir jinsli bo'lmasa, uning *h* uzunlikdagi *AB* qismning massasi $f(x_0 + xh) - f(x_0)$ bo'ladi, bunda $x_0$ qiymat sterjenning *A* boshlangich uchining koordinatasi. *AB* ismining o'rtacha zichligi:

$$k_{o'rt}(t) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha,$$

bunda $x_0$ nuqtadagi *chiziqli zichlik* $k(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} k_{o'rt}(t) = f'(x_0)$ bo'ladi. Har qanday *l* doimiy soning hosilasi nolga teng. Chunki, $l = 0\cdot x + l$ yozuvi bo'yicha *k* = *l* '= 0 ni olamiz. Demak (*kx*+*l*) ' = *k* . Lekin $(x^2)' = 2x$ bo'ladi. Chunki $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = (2x+h)h$ bo'lganida, $(k+\alpha)h$ yozuv bo'yicha *k* = 2*x* olinadi. [*a; b*] yopiq kesmaning *a* nuqtasida *f* funksiyaning o'ng tomonli, *b* nuqtasida esa chap tomonli differensiallanishi haqida so'z borishi mumkin:

$$f'(a+0) = \lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\quad f'(b-0) = \lim_{h\to -0}\frac{f(b-h)-f(b)}{h}.$$

2 – m i s o l . (3) formuladan foydalanib, $f(x) = \dfrac{a}{x}$ funksiya hosilasini topamiz, bunda *a* –biror doimiy son, $\Delta x = f,\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x), x \neq 0.$

Y e ch i sh . $\Delta y = \frac{a}{x+\Delta x} - \frac{a}{x} = \frac{ax - ax - a\cdot\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{a\cdot\Delta x}{x(x+\Delta x)}$, u holda: $\left(\frac{a}{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{a}{x(x+\Delta x)}\right) = -\frac{a}{x^2}$.

3 – m i s o l . 1) $y = x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = ax^2 + bx + c$; 4) $y = x^3$

Y e ch i sh 1) $y = x = 1\cdot x + 0$, bundan $k = y' = 1$, ya'ni $x' = 1$ bo'lishini aniqlaymiz. Bu misolda (3) kabi limit formulalarda foydalanishga ho'jat bo'lmadi;

2) (1) formula bo'yicha:

$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x+\Delta x)\cdot\Delta x.$ Orttirma $\Delta y = (k+a)\cdot\Delta x$ ko'rinishida tasvirlanadi.Unda $\lim_{x\to 0}\alpha = 0,\ \ k = 2x.$ Demak, $(x^2)' = 2x;$

3) funksiya orttirmasi:

$\Delta y = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax\cdot\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\cdot\Delta x$

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2ax) + a\cdot\Delta x + b)\cdot\Delta x}{\Delta x} = 2ax + a\cdot\Delta x + b;$

Topilgan nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limiti:

$y' = \lim_{\Delta x\to 0}(2ax + a\cdot\Delta x + b) = 2ax + b.$

Demak, $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b;$

4) $\Delta(x^3) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = (3x^2 + 3x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2)\cdot\Delta x$

$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:


1. K. Muhamedov Elementar matematikadan qo'llanma. Toshkent 1999yi
2. H.A. Nasimov Algebra va matematik analiz asoslari. Toshkent 2010 yil
3. M. Saxayev Elementar matematika masalalari to'plami Toshkent 2001 yil.